



TITLE:

# Non-Orientable Closed Manifoldの Orientable Manifoldの中への写像 について (Knotting problemについ て)

AUTHOR(S):

崎田, 広造

---

CITATION:

崎田, 広造. Non-Orientable Closed ManifoldのOrientable Manifoldの中への写像について (Knotting problemについて). 数理解析研究所講究録 1974, 219: 103-108

ISSUE DATE:

1974-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105302>

RIGHT:

Non-orientable closed manifold の  
Orientable manifold の中への写像について

関孝 M2 崎田広造

証明したいことは、次の定理およびその系である。

[定理]  $M^n$  を closed connected non-orientable  
PL  $n$ -manifold,  $N^{n+1}$  を  $H_n(N; \mathbb{Z}_2) = 0$  を満たす  
orientable PL  $n+1$ -manifold とし,  $f: M^n \rightarrow N^{n+1}$  を任  
意の PL map とする。また,  $N(S_2(f); M)$  を singular set  
 $S_2(f)$  の  $M^n$  における regular neighborhood とする。  
その時  $\alpha\{M^n - N(S_2(f); M)\} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_r$

但し  $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$  if  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, r$   
と書くことができ、各  $\Sigma_i$  は, compact orientable  
PL manifold with boundary になる。

[系]  $M^n$  は  $N^{n+1}$  に embed できない。

定理を証明する前に、次の Lemma を証明しておく。

[Lemma] 前述の  $N^{n+1}$  に含まれる  $n$  次元 solid Klein Bottle  $S^1 \times \mathbb{R} B^{n-1}$  を  $T^n$  とする。また,  $T^n$  の境界  $\partial T^n (= S^1 \times \mathbb{R} S^{n-2})$  を  $C^{n-1}$  とする。この  $T^n$  の core, 即ち  $\text{Int } B^{n-1}$  から 1 点  $y$  をとり,  $y \times S^1$  を考え, これを  $k$  とする。その時,  $\text{Link}[C^{n-1}, k] = 1 \pmod{2}$  in  $N^{n+1}$

[証明]

$k$  の  $N^{n+1}$  における regular neighborhood  $N(k; N^{n+1})$  を  $K$  とする。 $N^{n+1}$  が orientable であるから, 明らかに  $K$  は  $n+1$  次元 solid torus である。また,  $k$  上の任意の 1 点  $x$  の  $N^{n+1}$  における regular neighborhood  $N(x; N^{n+1})$  を  $D$  とすると, これは, 明らかに  $n+1$ -ball である。故に,  $x$  を始点とする 1 次独立で, どの 2 つも互いに直交する  $n+1$  個の vectors,  $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$  が, この  $n+1$ -ball  $D$  の中でとれて,  $e_1$  は  $k$  上の vector,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  は  $T^n$  の中で直交するようにできる。そこで, 点  $x$  より始まって,  $k$  を  $\partial K^{n+1}$  まで  $e^{n+1}$  方向に動かすことを考える。 $x$  より少し  $e_1$  方向に動いた  $k$  上の点  $x+\varepsilon$  において,  $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$  であった vector は,  $k$  に沿って,  $T^n$  を一周してくると,  $x-\varepsilon$  において,  $e_1, -e_2, -e_3, \dots, -e_n, -e_{n+1}$  となっている。何故ならば,  $k$  は  $S^1$  と homeomorphic であるから,  $k$  上の vector  $e_1$  は一周してきて, やはり  $e_1$  である。次に,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  は, non-

orientable manifold  $T^n = S^1 \times \tau B^{n-1}$  中の直交する vectors であって、一周してきても、 $e_1$  は変らないから、他の vectors  $e_2, e_3, \dots, e_n$  の符号は反対になる。そして、最後に、例えば、 $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$  を右手系にとっておくと、 $N^{n+1}$  は orientable であるから、 $k$  に沿って、 $T^n$  を一周しても、 $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$  が右手系であることには変りはない。一周すると  $e_1, -e_2, -e_3, \dots, -e_n$  となるから、 $e_{n+1}$  も  $-e_{n+1}$  となる。そうすれば、 $e_1, -e_2, \dots, -e_n, -e_{n+1}$  は始めの右手系と一致する。

故に、 $D$  内では、 $D \cap T$  が hyperplane となっていて、この  $n$  次元 hyperplane  $D \cap T$  の両側に  $k$  は押し出されたことになる。換言すると、 $\tilde{D} \approx \mathbb{R}^{n+1}$ 、 $\tilde{D} \cap T \approx \mathbb{R}^n$  であって、 $\mathbb{R}^{n+1}$  の  $n$  次元 hyperplane  $\mathbb{R}^n$  の両側に  $k$  は押し出されたことになる。だから、 $k$  は  $\tilde{D} \cap T$  と少なくとも、奇数個の点で交わることになる。故に、 $k$  と  $T^n$  との Intersection number は  $1 \bmod 2$  となる。 $\partial T^n = C^{n-1}$  であるから、 $k$  と  $C^{n-1}$  との Linking number も  $1 \bmod 2$  となる。即ち

$$\text{Link } k [C^{n-1}, k] = 1 \bmod 2 \text{ in } N^{n+1}$$

Q.E.D.

この場合、 $T^n$  は、non-orientable であるから、 $\bmod 2$  で考えた。そして、 $C^{n-1}$  を bound する complex (この場合、 $T^n$ ) のとり方にも依らないことが必要であるから、

$H_n(N^{n+1}; \mathbb{Z}_2) = 0$  が必要であった。だから、証明では、 $K$  を動かしたが、逆に、 $K$  を固定して、 $T^n$  を動かすと考えてもよい。

### [定理の証明]

$M^n$  の三角形分割を  $K$  とする。

ある  $i$  に対して、もし  $\Sigma_i$  が non-orientable と仮定すると次のような  $n$  次元 solid Klein Bottle  $T^n$  が  $\Sigma_i$  の中に存在する。すなわち、 $\Sigma_i$  の中には、次の条件(1)(2)を満たす  $n$ -simplex の有限列  $\Delta = \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m, \Delta_{m+1} = \Delta$  が必ず存在する。

- (1)  $1 \leq i \leq m-1$  なる  $i$  に対して、 $\Delta_i$  と  $\Delta_{i+1}$  は共通の  $(n-1)$ -face  $\Delta_i^{n-1}$  をもち、且つ同調している。
- (2)  $\Delta_m$  と  $\Delta_{m+1}$  は共通の  $(n-1)$ -face  $\Delta_m^{n-1}$  をもつが、同調はしていない。

このような  $n$ -simplex の有限列は  $M^n$  の分割にかかわらず必ず存在する。 $T^n = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_m$  とすると、作り方より、 $T^n$  は non-orientable compact connected PL  $n$ -manifold であって、 $T^n = S^1 \times \mathbb{R} B^{n-1}$  となる。

$cl[M^n - T^n] = A^n$  とおくと、 $\partial T^n = \partial A^n$  となり、これを  $C^{n-1}$  とおく。明らかに、 $C^{n-1} = \partial T^n = S^1 \times \mathbb{R} S^{n-2}$  であって

closed connected non-orientable PL  $(n-1)$ -manifold  
である。

$T'$  を  $T^n$  の first derived subdivision とする。

$\Delta_i^{*n}, \Delta_i^{*(n-1)}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) をそれぞれ,  $\Delta_i^n, \Delta_i^{n-1}$  の重心と  
する。  $\Delta_i^*$  と  $\Delta_i^*$  を結ぶ  $T'$  の 1-simplex を  $P_i$  とする。  $\Delta_i^*$  と  $\Delta_{i+1}^*$   
を結ぶ  $T'$  の 1-simplex を  $g_i$  とする。  $k = (P_1 \cup g_1) \cup (P_2 \cup g_2)$   
 $\cup \dots \cup (P_m \cup g_m)$  とおくと, 明らかに,  $k$  は  $S^1 \times (\text{int } B^n \text{ の 1 点})$  に  $T^n$  の中で isotopic である。今  $f: M^n \rightarrow N^{n+1}$   
を任意の PL map とすると,  $\Sigma_i$  の作り方より, (0 は内部)

$f(\dot{T}) \cap f(A) = \emptyset$  であり, また singular set  
 $S_2(f|Z_i) = \emptyset$  であるから,  $f|Z_i$  は embedding である  
故に,  $f|T$  も embedding となる。以上のことより  $f(c^{n-1})$   
は  $N^{n+1} - f(\dot{T})$  で  $f(A^n)$  を bound するから

$$\boxed{1} \quad f(c^{n-1}) \sim 0 \text{ mod } 2 \text{ in } N^{n+1} - f(k)$$

( '  $\sim$  ' means "homologous" )

一方, Lemma より

$$\text{Link}[f(c^{n-1}), f(k)] = 1 \text{ mod } 2 \text{ in } N^{n+1}$$

$$\boxed{2} \quad \therefore f(c^{n-1}) \not\sim 0 \text{ mod } 2 \text{ in } N^{n+1} - f(k)$$

$\boxed{1}, \boxed{2}$  より矛盾が出る。

故に,  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) は orientable manifold  
である。

Q.E.D.

[系の証明]

もし,  $M^n$  が  $N^{n+1}$  に embed できたとすると,  $S_2(f) = \emptyset$ .  
よって,  $M^n = \Sigma_1$  となり, 矛盾である。何故ならば,  $M^n$  は non-orientable であり, また, 定理より,  $\Sigma_1$  は orientable となるから。 Q.E.D.

応用例

- (1) 2次元 non-orientable manifold  $P_n$  は homology sphere の中に embed できない。
- (2) 2次元 non-orientable manifold  $P_n$  は Lens space  $L(2m+1, \pm 1)$  の中に embed できない。

$\because H_1(L) = \mathbb{Z}_{2m+1}, H_2(L) = 0$  であるから,  
universal coefficient theorem によって  
 $H_2(L; \mathbb{Z}_2) = 0 \otimes \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_{2m+1} * \mathbb{Z}_2 = 0$